



第3章 概率

3.1 条件概率与事件的独立性

3.1.1 条件概率+3.1.2 事件的独立性

易错记

1-1. 【解】由已知可得

$$\begin{cases} [1-P(A)][1-P(B)] = \frac{1}{9}, & \text{①} \\ P(A)[1-P(B)] = P(B)[1-P(A)], & \text{②} \end{cases}$$

由②得 $P(A) = P(B)$, 将其代入①式可得

$$P(A) = P(B) = \frac{2}{3}.$$

故事件 A 发生的概率为 $\frac{2}{3}$.

题型诀

1-1. C 【解析】记第一次取到的数为 m , 第二次取到的数为 n ,

则样本空间 $\Omega = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbf{N}_+, m \leq 10, n \leq 10, m \neq n\}$,

$A = \{(m, n) \mid n, k \in \mathbf{N}_+, m = 2k, k \leq 5, n \leq 10, m \neq n\}$,

$B = \{(m, n) \mid m, s \in \mathbf{N}_+, n = 3s, m \leq 10, s \leq 3, m \neq n\}$,

所以 $AB = \{(2, 3), (2, 6), (2, 9), (4, 3), (4, 6), (4, 9), (6, 3), (6, 9), (8, 3), (8, 6), (8, 9), (10, 3), (10, 6), (10, 9)\}$, 共 14 个,

所以 $n(\Omega) = 90, n(A) = 45, n(AB) = 14$,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{45}{90}, P(AB) = \frac{n(AB)}{n(\Omega)} = \frac{14}{90},$$

所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{14}{45}$. 故选 C.

1-2. B 【解析】设事件 A 为“第一次取得红球”, 事件 B 为“第二次取得白球”, 则事件 A 所包含的样本点个数为 $3 \times 4 = 12$, 事件 AB 所包含的样本点个数为 $3 \times$

$2 = 6$, 故 $P(B|A) = \frac{6}{12} = 0.5$. 故选 B.



1-3. B 【解析】 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)}$, 其中

AB 表示两次的点数均为奇数, 且两次的点数之和为 8, 共有两种情况, 即 $(3, 5)$, $(5, 3)$, 故 $n(AB) = 2$. 又 $n(A) = C_3^1 \cdot C_3^1 =$

9, 所以 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{2}{9}$, 故选 B.

2-1. A 【解析】记“甲击中目标”为事件 A , “乙击中目标”为事件 B , “目标被击中”为事件 C , 则 $P(C) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - (1 - 0.6) \times (1 - 0.7) = 0.88$.

则在目标被击中的情况下, 甲、乙同时击

中目标的概率为 $P(AB|C) = \frac{P(AB)}{P(C)} =$

$\frac{P(A)P(B)}{P(C)} = \frac{0.6 \times 0.7}{0.88} = \frac{21}{44}$. 故选 A.

2-2. $\frac{6}{7}$ 【解析】设事件 A 为“一瓶是蓝色”, 事件 B 为“另一瓶是红色”, 事件 C 为“另一瓶是黑色”, 且 B 与 C 互斥.

$\therefore P(A) = \frac{C_2^1 C_3^1 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{7}{10}$, $P(AB) = \frac{C_2^1 C_1^1}{C_5^2} =$

$\frac{1}{5}$, $P(AC) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{2}{5}$,

$\therefore P((B \cup C)|A) = P(B|A) + P(C|A) =$

$\frac{P(AB)}{P(A)} + \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{6}{7}$.

2-3. $\frac{1}{4995}$ 【解析】设事件 A 表示患肺癌, 则 $P(A) = 0.03\%$,

事件 B 表示吸烟时间不超过 20 年的市民, 则 $P(B) = 99.9\%$,

吸烟时间超过 20 年的市民患肺癌的概率

$P(A|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)} =$

10% , 则 $P(AB) = 0.02\%$,

则吸烟时间不超过 20 年的市民患肺癌

的概率 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.02\%}{99.9\%} =$

$\frac{1}{4995}$.

3-1. D 【解析】对于 A 选项, 假设



$$P(B) = P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \text{ 可得 } P(AB) =$$

$P(A)P(B)$, 即当事件 A, B 相互独立时, 才有 $P(B) = P(B|A)$, 故错误;

$$\text{对于 B 选项, 由 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A|$$

$$B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ 故当 } P(A) = P(B) \text{ 时, 才有}$$

$$P(B|A) = P(A|B), \text{ 故错误;}$$

$$\text{对于 C 选项, 因为 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } P(AB) = P(A)P(B|A), \text{ 故错误;}$$

$$\text{对于 D 选项, 由 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, 1 \geq$$

$P(B) > 0$, 可知 $P(AB) \leq P(A|B)$, 故正确. 故选 D.

4-1. 【解】(1) 记“甲队总得分为 1 分”为事件 A . 甲队得 1 分, 即甲队三人中只有 1 人答对, 其余 2 人都答错,

$$\begin{aligned} \text{则 } P(A) &= \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \\ &\left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \\ &\left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

$$\therefore \text{甲队总得分为 1 分的概率为 } \frac{2}{9}.$$

(2) 记“甲队总得分为 2 分”为事件 B , “乙队总得分为 1 分”为事件 C .

事件 B 即甲队三人中有 2 人答对, 剩余 1 人答错,

$$\begin{aligned} \therefore P(B) &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} \times \\ &\left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

事件 C 即乙队三人中只有 1 人答对, 其余 2 人答错,

$$\begin{aligned} \therefore P(C) &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \\ &\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \\ &\left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



由题意,事件 B 与事件 C 相互独立,

\therefore 甲队总得分为 2 分且乙队总得分为 1

分的概率 $P(BC) = P(B)P(C) = \frac{4}{9} \times$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{9}.$$

4-2. 【解】(1) 记随机抽取甲、乙、丙三家企业的一件产品,产品合格分别为事件 B_1, B_2, B_3 , 则三个事件相互独立.

记三件产品中恰有两件产品合格为事件

$$D, \text{ 则 } D = B_1 B_2 \bar{B}_3 + B_1 \bar{B}_2 B_3 + \bar{B}_1 B_2 B_3,$$

$$\text{所以 } P(D) = P(B_1 B_2 \bar{B}_3) + P(B_1 \bar{B}_2 B_3) +$$

$$P(\bar{B}_1 B_2 B_3) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \frac{4}{5} \times$$

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{30}.$$

故从三家企业的产品中各取一件抽检,

则这三件产品中恰有两件产品合格的概

率为 $\frac{13}{30}$.

(2) 记购买的电器合格为事件 B ,

随机购买一台该电器,买到的产品为甲、

乙、丙三家企业分别为事件 A_1, A_2, A_3 ,

$$\text{则 } P(A_1) = \frac{2}{5}, P(A_2) = \frac{9}{25}, P(A_3) = \frac{6}{25},$$

$$P(B|A_1) = \frac{4}{5}, P(B|A_2) = \frac{2}{3}, P(B|$$

$$A_3) = \frac{3}{4},$$

$$\text{所以 } P(B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) +$$

$$P(A_3 B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|$$

$$A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{9}{25} \times \frac{2}{3} +$$

$$\frac{6}{25} \times \frac{3}{4} = \frac{37}{50}.$$

故在市场中随机购买一台该电器,买到

的是合格品的概率为 $\frac{37}{50}$.

5-1. C 【解析】记甲、乙、丙三人通过强基计划分别为事件 A, B, C , 显然 A, B, C 为相互独立事件, 则“三人中恰有两人通过”相当于事件 $\bar{A}BC + A\bar{B}C +$



ABC , 且 $\bar{A}BC, A\bar{B}C, AB\bar{C}$ 互斥, \therefore 所求概率 $P(\bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}) = P(\bar{A}BC) + P(A\bar{B}C) + P(AB\bar{C}) = P(\bar{A})P(B)P(C) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(A)P(B)P(\bar{C}) = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{33}{80}$. 故选 C.

5-2. 【解】记“三个元件 T_1, T_2, T_3 正常工作”分别为事件 A_1, A_2, A_3 , 则 $P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{3}{4}, P(A_3) = \frac{3}{4}$.

\therefore 电路不发生故障的事件为 $(A_2 \cup A_3) \cap A_1$,

\therefore 电路不发生故障的概率

$$\begin{aligned} P &= P[(A_2 \cup A_3) \cap A_1] \\ &= [1 - P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)] \cdot P(A_1) \\ &= \left(1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{15}{32}. \end{aligned}$$

巩固练

1. B 【解析】事件 A : “甲骰子的点数大于 3” 包含点数 4, 5, 6 三种情况, 所以

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \text{ 事件 } B: \text{“甲、乙两骰子的点数之和等于 7”, 所以事件 } A \text{ 与}$$

事件 B 同时发生所包含的情况有 (4, 3), (5, 2), (6, 1), 共 3 个样本点; 而抛掷甲、乙两颗骰子, 共有 36 种情况, 所以事件 A 与事件 B 都发生的概率

$$\begin{aligned} P(AB) &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \text{ 故 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

2. A 【解析】设事件 A 为“学生甲不是第一个出场, 学生乙不是最后一个出场”, 事件 B 为“学生丙第一个出场”.

$$\text{则 } P(A) = \frac{A_5^5 - 2A_4^4 + A_3^3}{A_5^5} = \frac{13}{20}, P(AB) =$$

$$\frac{A_4^4 - A_3^3}{A_5^5} = \frac{3}{20}, \text{ 所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} =$$



$$\frac{\frac{3}{20}}{\frac{13}{20}} = \frac{3}{13}.$$

3. **D** 【解析】记事件 A 为“至少有两人选择物理”，事件 B 为“甲同学选择物理”，

$$\text{则 } P(A) = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} + C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{27},$$

$$P(AB) = \frac{1}{3} \times \left[C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + C_2^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] = \frac{5}{27}, \therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} =$$

$$\frac{\frac{5}{27}}{\frac{7}{27}} = \frac{5}{7}. \text{ 故选 D.}$$

4. $\frac{3}{4}$ 【解析】由 A 与 B 互斥，知

$$P(\overline{AB}) = P(A),$$

$$\text{所以 } P(A|\overline{B}) = \frac{P(\overline{AB})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A)}{P(\overline{B})} =$$

$$\frac{0.3}{1-0.6} = \frac{3}{4}.$$

5. **D** 【解析】从这 20 名学生中随机抽取一人，样本点总数为 20. 由题意可知，事件 B 包含的样本点有 9 个，故

$$P(B) = \frac{9}{20}.$$

又事件 AB 包含的样本点有 5 个，故

$$P(AB) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{故 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{20}} = \frac{5}{9}, \text{ 故}$$

选 D.

6. $\frac{8}{15}$ $\frac{1}{9}$ 【解析】设 A 表示事件“恰有 1 名女生参加劳动技能学习”， B 表示

事件“至少有 1 名女生参加劳动技能学习”， C 表示事件“都是女生参加劳动技能学习”，

$$\text{则 } P(A) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15},$$



$$P(B) = \frac{C_4^1 C_2^1 + C_2^2}{C_6^2} = \frac{9}{15},$$

$$P(C) = P(BC) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15},$$

$$\text{所以 } P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{1}{9}.$$

7. $\frac{13}{14}$ 【解析】记事件 A = “任取的三个数中有 a_{22} ”, 事件 B = “三个数中至少

有两个数位于同行或同列”, 则 \bar{B} = “三个数互不同行且不同列”, 依题意得

$$n(A) = C_8^2 = 28, n(A\bar{B}) = 2,$$

$$\text{故 } P(\bar{B}|A) = \frac{n(A\bar{B})}{n(A)} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14},$$

$$\text{则 } P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}.$$

故已知取到 a_{22} 的条件下, 至少有两个

数位于同行或同列的概率为 $\frac{13}{14}$.

8. 【解】因为 $P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B}A)}{P(A)} =$

$$\frac{P(\bar{B}A)}{1 - P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{B}A)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } P(\bar{B}A) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{因为 } P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{B}\bar{A})}{P(\bar{A})},$$

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - P(B|\bar{A}) = \frac{3}{4},$$

$$\text{所以 } P(\bar{B}\bar{A}) = P(\bar{B}|\bar{A})P(\bar{A}) = \frac{3}{8},$$

$$\text{所以 } P(\bar{B}) = P(\bar{B}A) + P(\bar{B}\bar{A}) = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} =$$

$$\frac{17}{24},$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{7}{24},$$

$$\text{从而 } P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{7}{24}} =$$

$$\frac{3}{7}.$$



9. **BCD** 【解析】由题可得 $P(AB) =$

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{6^3} = \frac{5}{18}, P(A) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \frac{5}{9},$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216},$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{91}{216}} = \frac{60}{91},$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{2}.$$

故 A 错误, BCD 正确. 故选 BCD.

10. **ACD** 【解析】由条件概率公式 $P(B|$

$$A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \text{ 及 } 0 < P(A) \leq 1, \text{ 知 } P(B|$$

$A) \geq P(AB)$, 故 A 选项错误;

当事件 A 包含事件 B 时, 有 $P(AB) =$

$$P(B), \text{ 此时 } P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}, \text{ 故 B 选}$$

项正确;

由于 $0 \leq P(B|A) \leq 1, P(A|A) = 1$, 故

C, D 选项错误.

11. **BD** 【解析】A 选项, 7 个数中, 正实

数为 $\frac{1}{2}, \pi, \ln 2, \sqrt{2}, e$, 共 5 个, 故

$$P(A) = \frac{5}{7}, \text{ A 错误;}$$

B 选项, 7 个数中, 无理数为 $\pi, \ln 2,$

$$\sqrt{2}, e, \text{ 故 } P(B) = \frac{4}{7}, \text{ B 正确;}$$

C 选项, 7 个数中, 既是无理数, 又是

正实数的是 $\pi, \ln 2, \sqrt{2}, e$, 共 4 个, 故

$$P(AB) = \frac{4}{7}, \text{ C 错误;}$$

D 选项, 由条件概率公式得 $P(B|$

$$A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{4}{5}, \text{ D 正确. 故}$$

选 BD.



3.1.3 乘法公式+3.1.4 全概率公式+3.1.5 贝叶斯公式

题型诀

1-1. A 【解析】 $\because P(B|A) = 0.6$,
 $P(A) = 0.3$, $\therefore P(AB) = P(A)P(B|A) =$
 $0.3 \times 0.6 = 0.18$.

又 $P(A) = P(AB) + P(\overline{AB})$, $\therefore P(\overline{AB}) =$
 $P(A) - P(AB) = 0.12$. 故选 A.

1-2. 0.12 【解析】设 A_i 表示事件“第 i 次将椰子扔向地面未摔裂, $i = 1, 2$ ”, 则
 $P(A_1) = 0.4$, $P(A_2|A_1) = 0.3$, 所以
 $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = 0.4 \times 0.3 =$
 0.12 .

故这个椰子从 15 米高的楼层扔向地面两次后仍未摔裂的概率为 0.12.

2-1. $\frac{13}{16}$ 【解析】设“小王从这 8 道题中
 任选 1 道, 且做对”为事件 A , “选到能完整做对的 4 道题”为事件 B , “选到有思路的 3 道题”为事件 C , “选到完全没有思路的 1 道题”为事件 D ,

则 $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{3}{8}$, $P(D) =$

$\frac{1}{8}$, 由全概率公式可得 $P(A) = P(B)P(A|B) +$

$P(C)P(A|C) + P(D)P(A|D) = \frac{1}{2} \times$

$1 + \frac{3}{8} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$.

2-2. 【解】(1) 由第一个档案袋内有 6 名男生和 4 名女生的报名表, 得从中随机抽取 2 份报名表, 样本点的个数为 $n = C_{10}^2 = 45$.

\therefore 从中抽到两名男生报名表包含的样本点的个数为 $m = C_6^2 = 15$,

\therefore 从中抽到两名男生报名表的概率 $P =$

$\frac{m}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.



(2) 设事件 A_i 表示选择的是第 i 个档案袋($i=1,2$), 事件 B 表示抽取的报名表是一名男生一名女生,

$$\text{则 } P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{2}, P(B|A_1) =$$

$$\frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}, P(B|A_2) = \frac{C_5^1 C_5^1}{C_{10}^2} = \frac{5}{9},$$

\therefore 抽取的报名表是一名男生一名女生的概率为 $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) +$

$$P(A_2) \cdot P(B|A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} + \frac{1}{2} \times$$

$$\frac{5}{9} = \frac{49}{90}.$$

3-1. BD 【解析】 记事件 A 为车床加工的零件为次品, 记事件 B_i 为第 i 台车床加工的零件($i=1,2,3$), 则 $P(A|B_1) = 6\%$, $P(A|B_2) = P(A|B_3) = 5\%$, 且 $P(B_1) = 25\%$, $P(B_2) = 30\%$, $P(B_3) = 45\%$.

A: 任取一个零件是第 1 台生产出来的次品概率为 $P(AB_1) = P(B_1)P(A|B_1) = 25\% \times 6\% = 0.015$, 故错误;

B: 任取一个零件是次品的概率为 $P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = 25\% \times 6\% + 30\% \times 5\% + 45\% \times 5\% = 0.0525$, 故正确;

C: 如果取到的零件是次品, 且是第 2 台车床加工的, 概率为 $P(B_2|A) = \frac{P(AB_2)}{P(A)} =$

$$\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{30\% \times 5\%}{5.25\%} = \frac{2}{7}, \text{ 故错误;}$$

D: 如果取到的零件是次品, 且是第 3 台车床加工的, 概率为 $P(B_3|A) = \frac{P(AB_3)}{P(A)} =$

$$\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)} = \frac{45\% \times 5\%}{5.25\%} = \frac{3}{7}, \text{ 故}$$

正确.

3-2. B 【解析】 记事件 A 表示“从剩下的 9 箱书中随机打开 2 箱, 结果是 1 箱



语文书、1 箱数学书”，事件 B_1 表示“丢失的 1 箱是语文书”，事件 B_2 表示“丢失的 1 箱是数学书”，事件 B_3 表示“丢失的 1 箱是英语书”，则 $P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i)$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{4 \times 3}{C_9^2} + \frac{3}{10} \times \frac{5 \times 2}{C_9^2} + \frac{1}{5} \times \frac{5 \times 3}{C_9^2} = \frac{1}{3},$$

$$P(AB_3) = P(B_3)P(A|B_3) = \frac{1}{5} \times \frac{5 \times 3}{C_9^2} =$$

$$\frac{1}{12}, \text{由贝叶斯公式可得 } P(B_3|A) =$$

$$\frac{P(AB_3)}{P(A)} = \frac{1}{12} \times 3 = \frac{1}{4}. \text{ 故选 B.}$$

4-1. B 【解析】 设事件 A 表示“射击中靶”，事件 B_1 表示“使用的枪校准过”，事件 B_2 表示“使用的枪未校准”，

$$\text{则 } P(B_1) = \frac{5}{8}, P(B_2) = \frac{3}{8}, P(A|B_1) =$$

$$0.8, P(A|B_2) = 0.3.$$

根据全概率公式得 $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$

$$= \frac{5}{8} \times 0.8 + \frac{3}{8} \times$$

$$0.3 = \frac{49}{80}, \text{所以由贝叶斯公式得 } P(B_1|A) =$$

$$\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{8} \times 0.8}{\frac{49}{80}} = \frac{40}{49}. \text{ 故}$$

选 B.

4-2. ABC 【解析】 $P(D_1) = 0.02,$

$$P(D_2) = 0.05, P(D_3) = 0.005, P(S|D_1) =$$

$$0.4, P(S|D_2) = 0.18, P(S|D_3) = 0.6.$$

由全概率公式得 $P(S) = \sum_{i=1}^3 P(D_i)P(S|D_i)$

$$= 0.02 \times 0.4 + 0.05 \times 0.18 +$$

$$0.005 \times 0.6 = 0.02, \text{故 A 正确.}$$

由贝叶斯公式得 $P(D_1|S) =$

$$\frac{P(D_1)P(S|D_1)}{P(S)} = \frac{0.02 \times 0.4}{0.02} = 0.4, \text{故 B}$$

正确.

$$P(D_2|S) = \frac{P(D_2)P(S|D_2)}{P(S)} = \frac{0.05 \times 0.18}{0.02} =$$

$$0.45, \text{故 C 正确. } P(D_3|S) =$$



$$\frac{P(D_3)P(S|D_3)}{P(S)} = \frac{0.005 \times 0.6}{0.02} = 0.15, \text{ 故}$$

D 错误.

巩固练

1. **C** 【解析】设事件 A 为“第一次抽出的是黑球”，事件 B 为“第二次抽出的是黑球”，则 $B = AB + \bar{A}B$. 由全概率公式得 $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$.

$$\text{由题意 } P(A) = \frac{b}{a+b}, P(B|A) = \frac{b+c}{a+b+c},$$

$$P(\bar{A}) = \frac{a}{a+b}, P(B|\bar{A}) = \frac{b}{a+b+c},$$

$$\text{所以 } P(B) = \frac{b(b+c)}{(a+b)(a+b+c)} + \frac{ab}{(a+b)(a+b+c)} = \frac{b}{a+b}.$$

2. **C** 【解析】记“从甲盒中取出 2 个红球”为事件 C_1 ，“从甲盒中取出 2 个白球”为事件 C_2 ，“从甲盒中取出 1 个红球和 1 个白球”为事件 C_3 ，“从乙盒中取出的 2 个球均为红球”为事件 D . 显然，事件 C_1, C_2, C_3 两两互斥，且 $C_1 + C_2 + C_3$ 正好为“从甲盒中任取 2 个球”的样本空间 Ω ，由全概率公式得

$$P(D) = \sum_{i=1}^3 P(C_i)P(D|C_i) = \frac{C_3^2}{C_5^2} \times \frac{C_4^2}{C_5^2} +$$

$$\frac{C_2^2}{C_5^2} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} + \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{37}{100}, \text{ 故从甲盒中}$$

取出 2 个小球放入乙盒中，再从乙盒中取出 2 个小球，这 2 个小球为红球的概率为 $\frac{37}{100}$.

3. **A** 【解析】以 A_1, A_2, A_3 分别表示取得的这盒 X 光片是由甲厂、乙厂、丙厂生产的， B 表示取得的 X 光片为次品.

$$\text{由题意得, } P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{3}{10},$$

$$P(A_3) = \frac{1}{5}, P(B|A_1) = \frac{1}{10},$$

$$P(B|A_2) = \frac{1}{15}, P(B|A_3) = \frac{1}{20}.$$



则由全概率公式得

$$P_1 = P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{15} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{20} = 0.08.$$

由贝叶斯公式得 $P_2 = P(A_1|B) =$

$$\frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{10}}{0.08} = 0.625.$$

4. $\frac{13}{30}$ 【解析】因为 $P(A) = \frac{3}{5}$, 所以

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

因为 $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{2}{3}$, 所以 $P(B|\bar{A}) = 1 -$

$P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, 所以由全概率公

式可得 $P(B) = P(B|A)P(A) +$

$$P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{13}{30}.$$

5. A 【解析】设 A_1, A_2, A_3 分别表示产品

来自甲、乙、丙车间, B 表示产品为次

品, 则 $P(A_1) = 0.45, P(A_2) = 0.35,$

$P(A_3) = 0.2, P(B|A_1) = 0.04,$

$P(B|A_2) = 0.02, P(B|A_3) = 0.05.$

由全概率公式得

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 0.45 \times 0.04 + 0.35 \times 0.02 + 0.2 \times 0.05 = 0.035.$$

由贝叶斯公式得 $P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} =$

$$\frac{0.45 \times 0.04}{0.035} \approx 0.514,$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} =$$

$$\frac{0.35 \times 0.02}{0.035} = 0.2,$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} =$$

$$\frac{0.2 \times 0.05}{0.035} \approx 0.286,$$



所以该次品最大可能出自车间甲.

6. 【解】设“第一次取到的是红球”为事件 A_1 ，“第二次取到的是红球”为事件 A_2 .

根据题意得 $P(A_1) = \frac{4}{5}, P(\bar{A}_1) = \frac{1}{5}$,

$P(A_2|A_1) = \frac{7}{9}, P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) = \frac{1}{9}$.

(1) $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{4}{5} \times$

$\frac{7}{9} = \frac{28}{45}$.

(2) $P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) = \frac{1}{5} \times$

$\frac{1}{9} = \frac{1}{45}$.

(3) 要求的是取出一个红球和一个黑球的概率, 它包括两种情形: 第一次取到红球, 第二次取到黑球; 第一次取到黑球, 第二次取到红球, 即求事件 $A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2$ 的概率.

$P(\bar{A}_2|A_1) = \frac{2}{9}, P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{8}{9}$,

$P(A_1\bar{A}_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2|A_1) = \frac{4}{5} \times$

$\frac{2}{9} = \frac{8}{45}$,

$P(\bar{A}_1A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{1}{5} \times$

$\frac{8}{9} = \frac{8}{45}$,

$\therefore P(A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2) = P(A_1\bar{A}_2) +$

$P(\bar{A}_1A_2) = \frac{16}{45}$.

(4) 要求第二次取出的是红球, 即求事件 A_2 的概率.

由全概率公式可得 $P(A_2) = P(A_2|A_1) \cdot$

$P(A_1) + P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1) = \frac{7}{9} \times \frac{4}{5} +$

$\frac{8}{9} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

7. ABD 【解析】依题意, 知 $P(A_1) =$

$\frac{3}{3+4+2} = \frac{1}{3}, P(A_2) = \frac{4}{9}, P(A_3) = \frac{2}{9}$,



$$P(B|A_1) = \frac{93}{100}, P(B|A_2) = \frac{9}{10}, P(B|A_3) = \frac{9}{10}.$$

对于 A, 因为 $P(A_2) = \frac{4}{9} < \frac{9}{10} = P(B|A_2)$, 故 A 正确;

$$\begin{aligned} \text{对于 B, } P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{93}{100} + \frac{4}{9} \times \frac{9}{10} + \frac{2}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{91}{100} = 91\%, \end{aligned}$$

故 B 正确;

$$\text{对于 C, } P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} =$$

$$\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{93}{100}}{\frac{91}{100}} = \frac{31}{91} \neq \frac{31}{90},$$

故 C 错误;

$$\text{对于 D, } P(B|A_3) = \frac{9}{10} = 90\%, \text{ 故 D 正}$$

确. 故选 ABD.

3.2 离散型随机变量及其分布列

3.2.1 离散型随机变量及其分布

题型诀

1-1. B 【解析】①中 1 小时内经过的车辆数 X 和②中某人 1 小时内接电话的次数都是可以一一列举出来的, 而③中 1 天内的温度无法一一列举出来, 故是离散型随机变量的为①②.

1-2. AB 【解析】根据离散型随机变量的定义知, 选项 A, B 是离散型随机变量. 故选 AB.

2-1. A 【解析】由随机变量 X 满足

$$P(X=k) = \frac{k}{a}, k=1, 2, 3,$$

可得 $\frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \frac{3}{a} = 1$, 解得 $a=6$, 所以随

机变量 X 满足 $P(X=k) = \frac{k}{6}, k=1, 2, 3,$



所以 $P(1 < X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3) =$

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}. \text{ 故选 A.}$$

2-2. ABC 【解析】 \because 随机变量 ξ 的分

布列为 $P\left(\xi = \frac{k}{5}\right) = ak (k=1, 2, 3, 4, 5),$

$$\therefore P\left(\xi = \frac{1}{5}\right) + P\left(\xi = \frac{2}{5}\right) + P\left(\xi = \frac{3}{5}\right) +$$

$$P\left(\xi = \frac{4}{5}\right) + P(\xi = 1) = a + 2a + 3a + 4a + 5a =$$

$$15a = 1, \text{ 解得 } a = \frac{1}{15}, \text{ 故 A 正确;}$$

$$P(0.5 < \xi < 0.8) = P\left(\xi = \frac{3}{5}\right) = 3 \times \frac{1}{15} =$$

0.2, 故 B 正确;

$$P(0.1 < \xi < 0.5) = P\left(\xi = \frac{1}{5}\right) +$$

$$P\left(\xi = \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = 0.2, \text{ 故 C 正确;}$$

$$P(\xi = 1) = 5 \times \frac{1}{15} = \frac{1}{3} \neq 0.3, \text{ 故 D 错误.}$$

故选 ABC.

3-1. 【解】(1) 设事件 A: “一次性成型合

格”, 设事件 B: “经过技术处理后合格”,

$$\text{则 } P(A) = 0.6, P(B) = (1 - 0.6) \times 0.5 =$$

$$0.2.$$

所以得到一件合格零件的概率为 $P(A) +$

$$P(B) = 0.6 + 0.2 = 0.8.$$

(2) 若一件零件一次成型合格, 则 $X =$

$$1\,500 - 800 = 700;$$

若一件零件经过技术处理后合格, 则 $X =$

$$1\,500 - 800 - 100 = 600;$$

若一件零件成为废品, 则 $X = -800 - 100 +$

$$100 = -800.$$

所以 X 可取 700, 600, -800,

$$\text{且 } P(X = 700) = 0.6,$$

$$P(X = 600) = (1 - 0.6) \times 0.5 = 0.2,$$

$$P(X = -800) = (1 - 0.6) \times (1 - 0.5) = 0.2.$$

所以 X 的分布列为



X	700	600	-800
P	0.6	0.2	0.2

3-2. 【解】(1) 记“甲投篮投中”为事件 A ，“乙投篮投中”为事件 B .

“乙投篮次数不超过 1”包括三种情况：

第一种是甲第 1 次投篮投中，

第二种是甲第 1 次投篮未投中而乙第 1 次投篮投中，

第三种是甲、乙第 1 次投篮均未投中而甲第 2 次投篮投中.

故所求的概率 $P = P(A) + P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}A) =$

$P(A) + P(\bar{A})P(B) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(A) =$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

所以乙投篮次数不超过 1 的概率为 $\frac{5}{8}$.

(2) 甲、乙投篮次数总和 ξ 的可能取值为 1, 2, 3, 4,

$$P(\xi=1) = \frac{1}{4},$$

$$P(\xi=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4},$$

$$P(\xi=3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8},$$

$$P(\xi=4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

所以甲、乙投篮次数总和 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

4-1. A 【解析】由随机变量 X 的分布列

的性质可知, $a + \frac{1}{3} + 5a + \frac{1}{6} = 1$, 解得

$a = \frac{1}{12}$, $Y = 2X + 1$, $Y \geq 5$ 等价于 $X \geq 2$, 由

题表可知 $P(X \geq 2) = \frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$. 故

选 A.

4-2. 【解】由 $Y = \sin \frac{\pi}{2} X$, 得

当 $X = 1, 5$ 时, $Y = 1$;



当 $X=2, 4, 6$ 时, $Y=0$;

当 $X=3$ 时, $Y=-1$.

$$\text{则 } P(Y=1) = P(X=1) + P(X=5) = \frac{1}{2} +$$

$$\frac{1}{32} = \frac{17}{32},$$

$$P(Y=0) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{11}{32},$$

$$P(Y=-1) = P(X=3) = \frac{1}{8},$$

所以随机变量 Y 的分布列为

Y	1	0	-1
P	$\frac{17}{32}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{1}{8}$

巩固练

1. **D** 【解析】由于甲赢了得 3 分, 平局得 1 分, 输了得 0 分, 故 $\{\xi=3\}$ 分成两种情况, 即 $3+0+0$ 或者 $1+1+1$, 即甲赢一局或甲、乙平局三次.

2. **B** 【解析】因为 $P(X=n) =$

$$\frac{a}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = a(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \text{ 所以}$$

$$P(X=1) + P(X=2) + \cdots + P(X=15) =$$

$$1, \text{ 即 } a(\sqrt{15+1} - 1) = 1, \text{ 解得 } a = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故 } P(X \leq 8) = P(X=1) + P(X=$$

$$2) + \cdots + P(X=8) = \frac{1}{3} \times (\sqrt{8+1} - 1) =$$

$$\frac{2}{3}, \text{ 故选 B.}$$

3. **B** 【解析】由离散型随机变量的性质

$$\text{可得 } \frac{1}{3} + 1 - 2q + 3q^2 - q + \frac{1}{3} = 1, \text{ 即 } (3q -$$

$$1)(3q - 2) = 0, \text{ 解得 } q = \frac{1}{3} \text{ 或 } q = \frac{2}{3}. \text{ 当}$$

$$q = \frac{2}{3} \text{ 时, } 1 - 2q < 0, \text{ 不合题意, } \therefore q = \frac{1}{3}.$$

4. **A** 【解析】由随机变量 ξ 的分布列

知, ξ^2 的所有可能取值为 0, 1, 4, 9,

$$\text{且 } P(\xi^2=0) = \frac{1}{3},$$



$$P(\xi^2=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3},$$

$$P(\xi^2=4)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4},$$

$$P(\xi^2=9)=\frac{1}{12}.$$

若 $P(\xi^2 < x) = \frac{11}{12}$, 则实数 x 的取值范围是 $(4, 9]$, 故选 A.

5. **B** 【解析】由题知 2 件次品全部被抽

$$\text{中的概率 } P = \frac{C_8^{n-2} C_2^2}{C_{10}^n} > 0.4,$$

$$\text{即 } \frac{8!}{(n-2)! (10-n)!} > 0.4 \times$$

$$\frac{10!}{n! (10-n)!},$$

$$\text{解得 } n > \frac{1 + \sqrt{145}}{2}, \text{ 故 } n \text{ 的最小值为 } 7.$$

故选 B.

6. **C** 【解析】 \because 随机变量 ξ 的分布列为

$$P(\xi=i) = a \left(\frac{1}{3} \right)^i, i=1, 2, 3,$$

$$\therefore a \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^3 \right] = 1, \text{ 解得}$$

$$a = \frac{27}{13}, \text{ 则 } \frac{13a}{9} = 3, \text{ 即 } \eta = 3, \therefore \xi = 2.$$

$$\therefore P\left(\eta = \frac{13a}{9}\right) = P(\eta=3) = P(\xi=2) =$$

$$a \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{27}{13} \times \frac{1}{9} = \frac{3}{13}. \text{ 故选 C.}$$

7. 【解】(1) 由题意, 甲队进入决赛的概率

$$\text{率为 } \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5},$$

$$\text{乙队进入决赛的概率为 } \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\text{丙队进入决赛的概率为 } \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{9},$$

显然甲队进入决赛的概率最大, 所以甲队进入决赛的可能性最大.

(2) 由(1)可知, 甲、乙、丙三队进入决

$$\text{赛的率分别为 } \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9},$$

随机变量 ξ 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$\text{可得 } P(\xi=0) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times$$



$$\left(1 - \frac{5}{9}\right) = \frac{4}{45},$$

$$P(\xi = 2) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{9} + \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} + \left(1 - \frac{5}{9}\right) \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{37}{90},$$

$$P(\xi = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{6},$$

$$P(\xi = 1) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 2) -$$

$$P(\xi = 3) = 1 - \frac{4}{45} - \frac{37}{90} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{4}{45}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{37}{90}$	$\frac{1}{6}$

- 8. ABC 【解析】**A, B, C 的结果都可以一一列举出来, 属于离散型随机变量; D 的结果不能一一列举出来, 不属于离散型随机变量.

3.2.2 几个常用的分布

易错记

- 1-1. 【解】**(1) 甲队第一、二局获胜, 或第二、三局获胜, 或第一、三局获胜, 则三局两胜制时甲队获胜的概率 $P = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_2^1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{27}.$

- (2) 甲队前三局获胜, 或甲队第四局获胜, 而前三局仅获胜两局, 或甲队第五局获胜, 而前四局仅获胜两局, 则五局三胜制时甲队获胜的概率 $P = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + C_4^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{64}{81}.$

- 2-1. 【解】**由题意可得, X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = \frac{C_6^1}{C_9^1} = \frac{2}{3},$$



$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_6^1}{A_9^2} = \frac{1}{4},$$

$$P(X=2) = \frac{A_3^2 C_6^1}{A_9^3} = \frac{1}{14},$$

$$P(X=3) = \frac{A_3^3 C_6^1}{A_9^4} = \frac{1}{84},$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{84}$

题型诀

1-1. C 【解析】令 $P(X=1)=p$ ($0 \leq p \leq 1$), 则 $P(X=0)=1-p$, 因为 $P(X=1) = \frac{3}{2}P(X=0)$, 所以 $p = \frac{3}{2}(1-p)$, 解得 $p = \frac{3}{5}$. 故选 C.

1-2. $\frac{1}{3}$ 【解析】设试验的成功率为 p , 则失败率为 $1-p$,

$$\therefore p = 2(1-p), \text{ 解得 } p = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore P(\xi=0) = 1-p = \frac{1}{3}.$$

1-3. 0.2 【解析】当 $\eta = -2$ 时, $\xi = 0$, 所以 $P(\eta = -2) = P(\xi = 0) = 1 - P(\xi = 1) = 0.2$.

2-1. ABCD 【解】AC 符合互斥事件的概念, 不是独立重复试验;

B 是相互独立事件, 但是“甲射中 10 环”与“乙射中 9 环”的概率不一定相同, 因此不是独立重复试验;

D 中 10 道题难度不同, 每道题做对的概率也不同, 因此不是独立重复试验. 故选 ABCD.

3-1. D 【解析】由题可知, 当 4 名员工中有 3 人或 4 人休假时, 两家店铺不能都正常营业. 设“两家店铺不能都正常营业”为事件 A. 有 4 人休假的概率为

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}, \text{ 有 3 人休假的概率为 } C_4^3 \times$$



$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$, 所以两家店铺不能都正

常营业的概率 $P(A) = \frac{1}{81} + \frac{8}{81} = \frac{1}{9}$, 所以

两家店铺在该节假日都能正常营业的概率

率为 $1 - P(A) = \frac{8}{9}$.

3-2. C 【解析】根据题意易得位于坐标原点的质点 P 移动六次后位于点 $(2, 4)$,

则质点在移动过程中向上移动 4 次, 向

右移动 2 次, 则其概率 $P = C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^6$.

3-3. 【解】 (1) 设“这名学生在上学路上

到第三个路口时首次遇到红灯”为事件

A , 因为事件 A 等价于“这名学生在第一个

和第二个路口没有遇到红灯, 在第三个

路口遇到红灯”, 所以事件 A 的概率

$P(A) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

(2) 设“这名学生在上学路上因遇到红灯

停留的总时间至多是 4 min”为事件 B ,

“这名学生在上学路上遇到 k 次红灯”为

事件 $B_k (k = 0, 1, 2, 3, 4)$. 由题意, 得

$P(B_0) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$,

$P(B_1) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$,

$P(B_2) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$. 由于

事件 B 等价于“这名学生在上学路上至

多遇到两次红灯”, 所以事件 B 的概率

$P(B) = P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) = \frac{16}{81} +$

$\frac{32}{81} + \frac{8}{27} = \frac{8}{9}$.

4-1. B 【解析】 $P(\xi \geq 1) = C_2^1 p(1-p) +$

$C_2^2 p^2 = \frac{5}{9}$, $9p^2 - 18p + 5 = 0$, 解得 $p = \frac{1}{3}$ 或 $p =$

$\frac{5}{3}$ (舍), 故 $P(\eta \geq 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} +$



$$C_3^3 \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{6}{27} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}, \text{ 故选 B.}$$

4-2. 【解】因为 $k=2$, 所以控制系统由 3 个元件组成, 所以控制系统中正常工作的元件个数 X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3$.

因为每个元件的正常工作与否相互独立, 且正常工作的概率均为 $p = \frac{2}{3}$, 所以

$$X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right).$$

$$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{4}{9},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{8}{27}.$$

所以控制系统中正常工作的元件个数 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$p_2 = P(X=2) + P(X=3) = \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27}.$$

5-1. B 【解析】由超几何分布的定义可判断, 只有 B 中的随机变量 X 服从超几何分布. 故选 B.

5-2. 【解】(1) 记“取出的 3 个球中至少有 1 个红色球”为事件 A , 则 $P(A) = 1 - \frac{C_7^3}{C_9^3} = \frac{7}{12}$.

(2) 记“取出 1 个红色球, 2 个白色球”为事件 B , “取出 2 个红色球, 1 个黑色球”为事件 C , 则所求概率为 $P(B \cup C) =$

$$P(B) + P(C) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_9^3} + \frac{C_2^2 C_4^1}{C_9^3} = \frac{5}{42}.$$

(3) ξ 的可能取值为 $0, 1, 2, 3$.

$$P(\xi=0) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{5}{21},$$

$$P(\xi=1) = \frac{C_3^1 C_6^2}{C_9^3} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28},$$



$$P(\xi=2)=\frac{C_3^2 C_6^1}{C_9^3}=\frac{3}{14},$$

$$P(\xi=3)=\frac{C_3^3}{C_9^3}=\frac{1}{84}.$$

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

5-3. 【解】(1) 记事件 A 为“抽取的 3 名同学中至少有 1 名共青团员”, 则 $P(\bar{A}) =$

$$\frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15},$$

$$\text{所以 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15},$$

即抽取的 3 名同学中至少有 1 名共青团员的概率是 $\frac{8}{15}$.

(2) 由题意知, X 可能的取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}.$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

6-1. 【解】(1) 设“从这 100 个水果中随机抽取一个, 抽到礼品果”为事件 A , 则

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

现有放回地随机抽取 4 个, 设抽到礼品

果的个数为 Y , 则 $Y \sim B\left(4, \frac{1}{5}\right)$, \therefore 恰好

抽到 2 个礼品果的概率 $P(Y=2) =$

$$C_4^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{96}{625}.$$

(2) 用分层抽样的方法从这 100 个水果中抽取 10 个, 则其中精品果 4 个, 非精



品果 6 个. 现从中抽取 3 个, 则精品果的数量 X 服从超几何分布, X 所有可能的取值为 $0, 1, 2, 3$.

$$\text{则 } P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=1) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}.$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

巩固练

1. **B** 【解析】由题易知, 该题属于独立重复

试验, 故所求概率 $P = C_4^2 \left(\frac{1}{5} \right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{5} \right)^{4-2} = \frac{96}{625}$. 故选 B.

2. **D** 【解析】由题意可知, 重复进行 9

次该试验, 恰好有 2 次试验未成功, 说明 7 次成功, 2 次未成功, 所以所求概率为 $C_9^2 p^7 (1-p)^2$. 故选 D.

3. **A** 【解析】 $P(\xi \leq 3) = P(\xi = 0) + P(\xi =$

$$1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = C_6^0 \left(\frac{1}{2} \right)^6 + C_6^1 \left(\frac{1}{2} \right)^6 + C_6^2 \left(\frac{1}{2} \right)^6 + C_6^3 \left(\frac{1}{2} \right)^6 = \frac{21}{32}.$$

4. 【解】(1) 因为 $(0.005 + a + 0.020 +$

$0.040 + 0.020) \times 10 = 1$, 所以 $a = 0.015$.

(2) 依题意可得, 随机变量 X 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3$.

$$P(X=0) = \frac{C_3^0 C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20},$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20},$$



$$P(X=3) = \frac{C_3^3 C_3^0}{C_6^3} = \frac{1}{20}.$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

(3) 设事件 A 为“随机抽取一名学生，对食堂‘比较满意’”。

因为样本人数 200 人，其中男生共有 80 人，

所以样本中女生共有 120 人。

由题中频率分布直方图可知，

女生对食堂“比较满意”的共有 $120 \times 0.020 \times 10 = 24$ (人)。

由题中频数分布表可知，男生对食堂“比较满意”的共有 16 人，

所以可估计从该校所有学生中随机抽取一名学生，其对食堂“比较满意”的

$$\text{概率为 } P(A) = \frac{24+16}{200} = \frac{1}{5}.$$

5. **B** 【解析】由题可知 $p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$ ，令

$$\frac{P(\xi=k+1)}{P(\xi=k)} = \frac{C_{20}^{k+1} p^{k+1} q^{20-k-1}}{C_{20}^k p^k q^{20-k}} = \frac{20-k}{2k+2} > 1,$$

得 $k < 6$ ，即当 $k < 6$ 时， $P(\xi=k+1) >$

$P(\xi=k)$ ；当 $k=6$ 时， $P(\xi=7) = P(\xi=$

$6)$ ；当 $k > 6$ 时， $P(\xi=k+1) < P(\xi=k)$ 。

所以 $P(\xi=6)$ 和 $P(\xi=7)$ 的值最大，故选 B。

6. **C** 【解析】根据二项分布的特点，知

(x_k, y_k) 分别为 $(0, 20), (1, 19), (2, 18), \dots, (20, 0)$ ，共 21 个。故选 C。

7. $\frac{5}{16} \quad \frac{21}{64}$ 【解析】设 X 表示向右移动

的次数，则 $X \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right)$ 。

若质点移动 6 次回到原点，则向左、右各移动 3 次，

所以质点回到原点的概率 $P(X=3) =$

$$C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$



设 Y 表示质点位置与点 3 的距离, 由上可知, $6-X$ 表示质点向左移动的次数,

则 $Y=|X-(6-X)-3|=|2X-9|\leq 1$, 即 $X=4$ 或 $X=5$, 所以 $P(Y\leq 1)=P(X=4)+P(X=5)=C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\frac{1}{2}=\frac{21}{64}$.

8. ACD 【解析】由题意知, 随机变量 X 服从超几何分布, 故 B 错误, C 正确;

$$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{7},$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3C_6^1}{C_{10}^4}=\frac{4}{35},$$

所以 $P(1<X<4)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{3}{7}+\frac{4}{35}=\frac{19}{35}$, 故 A, D 正确.

故选 ACD.

9. BD 【解析】对于 A, B 选项, $P_1=C_6^1\times$

$$\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^5=\frac{4}{243}, P_5=C_6^5\times\left(\frac{2}{3}\right)^5\times$$

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)^1=\frac{64}{243}, P_1<P_5, \text{故 A 错误, B}$$

正确;

对于 C 选项, $\sum_{k=0}^6 P_k=1$, 故 C 错误;

对于 D 选项, 由二项分布概率公式可

$$\text{得, } P_0=\frac{1}{729}, P_1=\frac{4}{243}, P_2=\frac{20}{243}, P_3=$$

$$\frac{160}{729}, P_4=\frac{80}{243}, P_5=\frac{64}{243}, P_6=\frac{64}{729}, \text{所以}$$

最大值为 P_4 , 故 D 正确.

3.2.3 离散型随机变量的

数学期望+3.2.4 离散型随机变量的方差

题型诀

1-1. C 【解析】因为 $0.2+a+0.4+0.1=1$, 解得 $a=0.3$, 故 A 错误; 由分布列知 $P(X\leq 1)=0.2+0.3=0.5$, 故 B 错误; $E(X)=0\times 0.2+1\times 0.3+2\times 0.4+3\times 0.1=$



1.4, 故 C 正确; $D(X) = (0-1.4)^2 \times 0.2 + (1-1.4)^2 \times 0.3 + (2-1.4)^2 \times 0.4 + (3-1.4)^2 \times 0.1 = 0.84$, 故 D 错误. 故选 C.

1-2. 【解】 (1) X 的可能取值为 0, 1, 2.

若 $X=0$, 表示没有取出次品, 其概率

$$P(X=0) = \frac{C_{10}^3}{C_{12}^3} = \frac{6}{11},$$

$$\text{同理, 有 } P(X=1) = \frac{C_2^1 C_{10}^2}{C_{12}^3} = \frac{9}{22},$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_{10}^1}{C_{12}^3} = \frac{1}{22}.$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{6}{11} + 1 \times \frac{9}{22} + 2 \times \frac{1}{22} = \frac{1}{2},$$

$$D(X) = \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{6}{11} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{9}{22} + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{22} = \frac{3}{22} + \frac{9}{88} + \frac{9}{88} = \frac{15}{44}.$$

(2) Y 的可能取值为 1, 2, 3, 显然 $X+Y=3$.

$$\text{方法一: } P(Y=1) = P(X=2) = \frac{1}{22},$$

$$P(Y=2) = P(X=1) = \frac{9}{22},$$

$$P(Y=3) = P(X=0) = \frac{6}{11},$$

$\therefore Y$ 的分布列为

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{6}{11}$

$$\therefore E(Y) = 1 \times \frac{1}{22} + 2 \times \frac{9}{22} + 3 \times \frac{6}{11} = \frac{5}{2},$$

$$D(Y) = \left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{1}{22} + \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{9}{22} + \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{6}{11} = \frac{9}{88} + \frac{9}{88} + \frac{3}{22} = \frac{15}{44}.$$

方法二: $E(Y) = E(3-X) = 3 - E(X) = 3 -$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$



$$D(Y) = D(3 - X) = (-1)^2 D(X) =$$

$$D(X) = \frac{15}{44}.$$

2-1. B 【解析】由 $0.2 + A + 0.4 = 1$ 得 $A = 0.4$, 所以 $E(X) = 1 \times 0.2 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.4 = 2.2$, 所以 $E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = 2 \times 2.2 + 3 = 7.4$. 故选 B.

2-2. AD 【解析】 $\because 2b + b - a + a = 3b = 1$,

$$\therefore b = \frac{1}{3},$$

$$\therefore E(X) = (-2) \times \frac{2}{3} + (-1) \times \left(\frac{1}{3} - a\right) + 0 \times$$

$$a = a - \frac{5}{3},$$

$$\therefore D(X) = \left(-2 - a + \frac{5}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} + \left(-1 - a + \frac{5}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3} - a\right) + \left(0 - a + \frac{5}{3}\right)^2 \times a = -a^2 +$$

$$\frac{5}{3}a + \frac{2}{9}.$$

$$\frac{7}{3}a + \frac{2}{9}.$$

$$\text{又} \because Y = 3X + 2,$$

$$\therefore E(Y) = 3E(X) + 2 = 3a - 3, D(Y) =$$

$$9D(X) = -9a^2 + 21a + 2.$$

$$\therefore \text{当 } a \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{3}\right) \text{ 上增大时, } E(Y) \text{ 增大;}$$

$$\therefore \text{函数 } y = -9a^2 + 21a + 2 \text{ 在 } \left(-\infty, \frac{7}{6}\right)$$

上单调递增,

$$\therefore \text{当 } a \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{3}\right) \text{ 上增大时, } D(Y) \text{ 增大.}$$

故选 AD.

$$\textbf{2-3. 【解】} (1) \text{ 因为 } E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{2}{5} +$$

$$20 \times \frac{1}{15} + 50 \times \frac{2}{15} + 60 \times \frac{1}{15} = 16,$$

$$\text{所以 } D(X) = (0 - 16)^2 \times \frac{1}{3} + (10 - 16)^2 \times$$

$$\frac{2}{5} + (20 - 16)^2 \times \frac{1}{15} + (50 - 16)^2 \times \frac{2}{15} + (60 -$$

$$16)^2 \times \frac{1}{15} = 384.$$

$$\text{所以 } X \text{ 的标准差 } \sqrt{D(X)} = \sqrt{384} = 8\sqrt{6}.$$

$$(2) \text{ 因为 } Y = 2X - E(X) = 2X - 16,$$



所以 $D(Y) = D(2X - 16) = 2^2 D(X) = 4 \times 384 = 1\ 536$.

3-1. D 【解析】因为 X 服从二项分布 $B(20, p)$, 所以 $E(X) = 20p = 6$, 解得 $p = 0.3$, 故 $D(X) = 20 \times 0.3 \times 0.7 = 4.2$. 故选 D.

3-2. 【解】(1) 因为随机抽取 1 辆单车是蓝色单车的概率为 $\frac{2}{3}$, 用 X 表示抽取的 5 辆单车中蓝色单车的数量, 则 X 服从二项分布, 即 $X \sim B\left(5, \frac{2}{3}\right)$,

所以抽取的 5 辆单车中有 3 辆是蓝色单车的概率为 $C_5^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$.

(2) 随机变量 ξ 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4.

$$P(\xi=0) = \frac{2}{3},$$

$$P(\xi=1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9},$$

$$P(\xi=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27},$$

$$P(\xi=3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{81},$$

$$P(\xi=4) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}.$$

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{81}$

$$E(\xi) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{2}{27} + 3 \times \frac{2}{81} + 4 \times \frac{1}{81} = \frac{40}{81}.$$

4-1. 【解】(1) 由题知 X 的所有可能取值为 1, 2, 3,

所以 $P(X=1) = p, P(X=2) = (1-p)p,$

$P(X=3) = (1-p)^2,$

所以 X 的分布列为



X	1	2	3
P	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2$

$$E(X) = p + 2(1-p)p + 3(1-p)^2 = p^2 - 3p + 3,$$

$$\text{由于 } p^2 - 3p + 3 = \frac{7}{4}, p^2 - 3p + \frac{5}{4} = 0,$$

$$\text{且 } 0 \leq p \leq 1, \text{ 所以 } p = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, 每人投中一次的概率 } p = \frac{1}{2},$$

所以每人至少投中一次的概率为 $1 -$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},$$

随机变量 Y 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3,$

$$4, 5, Y \text{ 服从二项分布, 即 } Y \sim B\left(5, \frac{3}{4}\right),$$

$$E(Y) = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}.$$

$$(3) Z \text{ 的所有可能取值为 } 0, 1, 2, 3,$$

$$P(Z=0) = \frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6},$$

$$P(Z=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2},$$

$$P(Z=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10},$$

$$P(Z=3) = \frac{C_4^3 C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{30},$$

$$E(Z) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}.$$

5-1. 【解】(1) 设事件 $A =$ “从样本中随机选取 1 名学生, 该学生选择了化学”,

$$\text{则 } P(A) = \frac{17+12+10+7+4}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},$$

所以从样本中随机选取 1 名学生, 该学

$$\text{生选择了化学的概率为 } \frac{1}{2}.$$

(2) 第 8 组、第 9 组、第 10 组共有 11 人,

其中选择政治的有 6 人, 所以 X 的所有

可能取值为 $0, 1, 2$.

$$P(X=0) = \frac{C_5^2}{C_{11}^2} = \frac{2}{11},$$

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 C_6^1}{C_{11}^2} = \frac{6}{11},$$



$$P(X=2) = \frac{C_6^2}{C_{11}^2} = \frac{3}{11}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{3}{11}$

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{2}{11} + 1 \times \frac{6}{11} + 2 \times \frac{3}{11} = \frac{12}{11}.$$

(3) 选择地理的总人数为 $20 + 14 + 12 + 10 + 9 + 7 + 5 + 2 = 79$.

$$\text{所以 } P(\text{同时选择生物}) = \frac{14 + 12 + 9 + 2}{79} = \frac{37}{79};$$

$$P(\text{同时选择化学}) = \frac{12 + 10 + 7}{79} = \frac{29}{79};$$

$$P(\text{同时选择政治}) = \frac{20 + 2}{79} = \frac{22}{79};$$

$$P(\text{同时选择物理}) = \frac{10 + 9 + 5}{79} = \frac{24}{79};$$

$$P(\text{同时选择历史}) = \frac{20 + 14 + 7 + 5}{79} = \frac{46}{79}.$$

因为 $\frac{46}{79}$ 最大, 所以如果 1 名学生选择了地理, 那么他同时选择历史的可能性最大.

5-2. 【解】(1) 随机变量 X 的所有可能取值为 0, 10, 30,

$$\text{则 } P(X=0) = 1 - 0.6 = 0.4,$$

$$P(X=10) = 0.6 \times (1 - 0.4) = 0.36,$$

$$P(X=30) = 0.6 \times 0.4 = 0.24.$$

故随机变量 X 的分布列为

X	0	10	30
P	0.4	0.36	0.24

(2) 若小明先回答 B 类问题, 记 Y 为小明的累计得分,

则随机变量 Y 的所有可能取值为 0, 20, 30,

$$\text{则 } P(Y=0) = 1 - 0.4 = 0.6,$$

$$P(Y=20) = 0.4 \times (1 - 0.6) = 0.16,$$

$$P(Y=30) = 0.4 \times 0.6 = 0.24,$$

$$\text{则 } E(Y) = 0 \times 0.6 + 20 \times 0.16 + 30 \times 0.24 =$$



10. 4.

由(1)知 $E(X) = 0 \times 0.4 + 10 \times 0.36 + 30 \times 0.24 = 10.8$.

因为 $E(Y) < E(X)$, 所以小明应选择先回答 A 类问题.

巩固练

1. **C** 【解析】抛掷骰子, 朝上面的点数 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

所以 $E(\xi) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5$. 故选 C.

2. **C** 【解析】 $\because E(X) = np = 4, D(X) = np(1-p) = q$,
 $\therefore 4(1-p) = q$, 即 $4p + q = 4$.

又 $p > 0, q > 0$,

$\therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{4}(4p + q) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) =$
 $\frac{1}{4} \left(5 + \frac{4p}{q} + \frac{q}{p} \right) \geq \frac{1}{4} \left(5 + 2\sqrt{\frac{4p}{q} \cdot \frac{q}{p}} \right) = \frac{9}{4}$ (当且仅当 $\frac{4p}{q} = \frac{q}{p}$, 即 $2p = q$ 时取等号),

$\therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$. 故选 C.

3. **A** 【解析】由题知 $E(X) = 3 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{3} = 6$, 则 $D(X) = (3-6)^2 \times \frac{1}{3} + (6-6)^2 \times \frac{1}{3} + (9-6)^2 \times \frac{1}{3} = 6$. 故选 A.

4. **D** 【解析】由 $D(X) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} n = \frac{4}{3}$,
 得 $n = 6$. 所以 $P(X = 2) = C_6^2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^4 = \frac{80}{243}$. 故选 D.

5. $\frac{1}{2}$ **2** 【解析】由分布列的性质, 可



$$\text{得 } \frac{1}{6} + p + \frac{1}{3} = 1, \text{ 解得 } p = \frac{1}{2} \text{ ①},$$

$$\text{因为 } E(X) = \frac{7}{6}, \text{ 所以 } 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times p + a \times$$

$$\frac{1}{3} = \frac{7}{6}, \text{ 即 } \frac{a}{3} + p = \frac{7}{6} \text{ ②},$$

$$\text{联立①②, 解得 } a = 2, p = \frac{1}{2}.$$

6. 【解】(1) 设事件 A 为“连续两年的蓄水量之差的绝对值小于 1 亿立方米”，从 2010 年到 2019 年的样本数据中随机选取连续两年共有 9 种可能，

由图表可知，事件 A 包含“2011 年和 2012 年”“2014 年和 2015 年”“2018 年和 2019 年”，

$$\text{所以 } P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

(2) 由表可知，2014 年至 2019 年的样本数据中，蓄水量超过 33 亿立方米的有 2 年，蓄水量不超过 33 亿立方米的有 4 年.

随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2.

$$P(X=0) = \frac{C_2^0 C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5},$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_4^1}{C_6^2} = \frac{8}{15},$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_4^0}{C_6^2} = \frac{1}{15}.$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3}.$$

(3) 从 2016 年开始连续三年的水库蓄水量的方差最大.

7. C 【解析】因为随机变量 ξ 的分布列

$$\text{为 } P(\xi=k) = \frac{a}{k+1} (k=1, 2, 5), \text{ 所以由}$$

分布列的性质可知, $P(\xi=1) + P(\xi=2) +$



$$P(\xi=5) = \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{6} = 1, \text{解得 } a=1.$$

对于 A, $P(0 < \xi < 3.5) = P(\xi=1) + P(\xi=2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, 故 A 不正确;

对于 B, 因为 $E(\xi) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{6} = 2$,

所以 $E(3\xi+2) = 3E(\xi) + 2 = 3 \times 2 + 2 = 8$, 故 B 不正确;

对于 C, $D(\xi) = \frac{1}{2} \times (1-2)^2 + \frac{1}{3} \times (2-2)^2 + \frac{1}{6} \times (5-2)^2 = 2$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $D(\xi) = 2$, 所以 $D(3\xi+1) = 9 \times D(\xi) = 18$, 故 D 不正确. 故选 C.

8. $\frac{5}{9}$ 【解析】 $\because 2b = a + c, E(\xi) = \frac{1}{3}$,

$$\therefore -a + c = \frac{1}{3} \text{ 且 } a + b + c = 1,$$

$$\text{即} \begin{cases} a + c - 2b = 0, \\ -a + c = \frac{1}{3}, \\ a + b + c = 1, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{6}, \\ b = \frac{1}{3}, \\ c = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\therefore D(\xi) = \left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{16}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{9}.$$

9. 0 $D(X)$ 【解析】因为 $E(X), D(X)$ 均为常数, 所以 $E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0, D(X - D(X)) = D(X).$

10. 100 【解析】由 $P(\xi = k) = C_{300}^k \cdot$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{300-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$300), \text{可知 } \xi \sim B\left(300, \frac{1}{3}\right). \text{ 所以}$$

$$E(\xi) = 300 \times \frac{1}{3} = 100.$$



11. $\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6}$ 【解析】由 $P(X=0) = \frac{1}{2}$,

$$P(X=1) = \frac{1}{4}, \text{ 可得 } P(X=x) = \frac{1}{4},$$

所以随机变量 X 的均值 $E(X) = 0 \times$

$$\frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x = \frac{1+x}{4},$$

$$\text{则方差 } D(X) = \left(0 - \frac{1+x}{4}\right)^2 \times \frac{1}{2} +$$

$$\left(1 - \frac{1+x}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(x - \frac{1+x}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} =$$

$$\frac{3x^2 - 2x + 3}{16} = \frac{3}{16} \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6},$$

所以当 $x = \frac{1}{3}$ 时, 随机变量 X 的方差

取得最小值, 最小值为 $\frac{1}{6}$.

12. 【解】(1) 记“从该校随机抽取 1 位教师, 该教师手机月使用流量不超过 300 M”为事件 D . 依题意, $P(D) = (0.000\ 8 + 0.002\ 2) \times 100 = 0.3$.

所以从该校教师中随机抽取 3 人, 至多有 1 人手机月使用流量不超过 300 M 的概率为 $(1-0.3)^3 + 0.3 \times (1-0.3)^2 \times 3 = 0.343 + 0.441 = 0.784$.

(2) 依题意, 从该校随机抽取 1 位教师, 该教师手机月使用流量 $L \in (300, 500]$ 的概率为 $(0.002\ 5 + 0.003\ 5) \times 100 = 0.6$, $L \in (500, 700]$ 的概率为 $(0.000\ 8 + 0.000\ 2) \times 100 = 0.1$.

当学校订购 A 套餐时, 设学校为 1 位教师承担的月费用为 X_1 元, 则 X_1 的所有可能取值为 20, 35, 50, 且 $P(X_1 = 20) = 0.3$, $P(X_1 = 35) = 0.6$, $P(X_1 = 50) = 0.1$, 所以 X_1 的分布列为

X_1	20	35	50
P	0.3	0.6	0.1

所以 $E(X_1) = 20 \times 0.3 + 35 \times 0.6 + 50 \times 0.1 = 32$ (元).

当学校订购 B 套餐时, 设学校为 1 位



教师承担的月费用为 X_2 元, 则 X_2 的所有可能取值为 30, 45, 且 $P(X_2 = 30) = 0.3 + 0.6 = 0.9$, $P(X_2 = 45) = 0.1$, 所以 X_2 的分布列为

X_2	30	45
P	0.9	0.1

所以 $E(X_2) = 30 \times 0.9 + 45 \times 0.1 = 31.5$ (元).

当学校订购 C 套餐时, 设学校为 1 位教师承担的月费用为 X_3 元, 则 X_3 的所有可能取值为 38, 且 $P(X_3 = 38) = 1$, 所以 $E(X_3) = 38 \times 1 = 38$ (元).

因为 $E(X_2) < E(X_1) < E(X_3)$, 所以学校订购 B 套餐最经济.

13. AD 【解析】 由题可知

$$\begin{cases} m+n=\frac{1}{2}, \\ 2 \times \frac{1}{2} + 3m+4n=\frac{8}{3}, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} m=\frac{1}{3}, \\ n=\frac{1}{6}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } D(X) &= \frac{1}{2} \times \left(2 - \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(3 - \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(4 - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}. \text{ 故} \\ &\text{选 AD.} \end{aligned}$$

14. AC 【解析】 由题意可得 $X_1 \sim$

$$B\left(2, \frac{2}{5}\right),$$

$$\begin{aligned} \text{则 } E(X_1) &= 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}, D(X_1) = 2 \times \\ &\frac{2}{5} \times \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{12}{25}. \end{aligned}$$

由题意知 X_2 的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$\text{则 } P(X_2 = 0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10},$$

$$P(X_2 = 1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10},$$

$$P(X_2 = 2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10},$$

$$\text{所以 } E(X_2) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times$$



$$\frac{1}{10} = \frac{4}{5},$$

$$D(X_2) = \frac{3}{10} \times \left(0 - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{6}{10} \times \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{10} \times \left(2 - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25},$$

所以 $E(X_1) = E(X_2), D(X_1) > D(X_2)$.

故选 AC.

3.3 正态分布

易错记

1-1. D 【解析】因为 $P(X \leq 0) = P(X \geq 2) = 0.2$, 所以 $P(X < 2) = 1 - P(X \geq 2) = 1 - 0.2 = 0.8$. 故选 D.

1-2. A 【解析】随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2, 25)$, 则此正态分布对应的正态曲线关于直线 $x=2$ 对称.

又 $P(\xi > c) = P(\xi < c-4)$, 所以 $c + (c-4) = 4$, 解得 $c=4$, 故选 A.

题型诀

1-1. C 【解析】由题知正态曲线关于直线 $x=0$ 对称, 因为 $f(x) = P(X \geq x), x > 0$, 根据对称性可得 $f(-x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x) = 1 - P(X \geq x) = 1 - f(x)$, 所以 $f(-x) + f(x) = 1$.

2-1. D 【解析】因为随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $P(X > -1) + P(X \geq 5) = 1$, 而 $P(X > -1) + P(X \leq -1) = 1$, 所以 $P(X \geq 5) = P(X \leq -1)$, 所以 $\mu = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$, 故选 D.

2-2. 0.14 【解析】由于学生成绩 $X \sim N(110, \sigma^2)$, $P(95 \leq X \leq 125) = 0.72$, 所以 $P(X > 125) = \frac{1}{2} [1 - P(95 \leq X \leq 125)] = \frac{1}{2} (1 - 0.72) = 0.14$.

3-1. C 【解析】根据题意得 $P\left(|X_n| \geq \frac{1}{4}\right) \leq 0.0027$, 则 $P\left(|X_n| < \frac{1}{4}\right) \geq 1 - 0.0027 = 0.9973$.



$$0.002\,7 = 0.997\,3,$$

$$\text{即 } P\left(-\frac{1}{4} < X_n < \frac{1}{4}\right) \geq 0.997\,3. \text{ 因为 } \mu =$$

$$0, \text{ 所以 } P(-3\sigma \leq X \leq 3\sigma) = 0.997\,3,$$

$$\text{所以 } 3\sigma \leq \frac{1}{4}, \text{ 所以 } \sqrt{\frac{2}{n}} \leq \frac{1}{12}, \text{ 解得 } n \geq$$

288, 所以至少要测量的次数为 288.

4-1. D 【解析】 \because 随机变量 $\xi \sim N(0,$

$$1), P(\xi > 1) = p, \therefore P(\xi < -1) = p,$$

$$\therefore P(-1 < \xi < 0) = \frac{1}{2} - p. \text{ 故选 D.}$$

4-2. 【解】 (1) 设考生的成绩为 X , 由题

意可得 X 服从正态分布, 即 $X \sim N(180,$

$$\sigma^2), \text{ 令 } Y = \frac{X-180}{\sigma}, \text{ 则 } Y \sim N(0, 1).$$

由 360 分及以上的考生有 30 名,

$$\text{可得 } P(X \geq 360) = \frac{30}{2\,000},$$

$$\text{则 } P(X < 360) = 1 - \frac{30}{2\,000} = 0.985,$$

$$\text{即 } P\left(Y < \frac{360-180}{\sigma}\right) = 0.985,$$

$$\text{则 } \frac{360-180}{\sigma} \approx 2.17, \text{ 解得 } \sigma \approx 83,$$

$$\text{则 } X \sim N(180, 83^2).$$

设最低录取分数线为 x_0 ,

$$\text{则 } P(X \geq x_0) = P\left(Y \geq \frac{x_0-180}{83}\right) =$$

$$\frac{300}{2\,000},$$

$$\text{即 } P\left(Y < \frac{x_0-180}{83}\right) = 1 - \frac{300}{2\,000} = 0.85, \text{ 则}$$

$$\frac{x_0-180}{83} \approx 1.04,$$

$$\text{解得 } x_0 = 266.32,$$

即最低录取分数线约为 266.

(2) 考生甲的成绩 $286 > 266$, 所以能被

录取,

$$P(X < 286) = P\left(Y < \frac{286-180}{83}\right) \approx$$

$$P(Y < 1.28) \approx 0.900,$$

表明不低于考生甲的成绩的人数大约占



总人数的 $1 - 0.900 = 0.100$, 即考生甲大约排在第 $2\,000 \times 0.100 = 200$ 名, 所以考生甲能获得高薪职位.

巩固练

1. **C** 【解析】由 $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}, x \in$

\mathbf{R} 知 $\mu = 1$, 则 $E(X) = 1$, 所以 $E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = 3$. 故选 C.

2. **A** 【解析】随机变量 $X \sim N(5, 1)$, 且

$$P(4 < X < 6) = m, P(3 < X < 7) = n,$$

$$\therefore P(5 < X < 6) = \frac{m}{2}, P(3 < X < 5) = \frac{n}{2},$$

$$\therefore P(3 < X < 6) = \frac{m+n}{2}.$$

3. **C** 【解析】由烟台苹果(把苹果近似看成球体)的直径(单位: mm)服从正态分布 $N(80, 5^2)$, 可得 $\mu = 80, \sigma = 5$.

则直径在 $[75, 90]$ 内的概率为 $P(\mu -$

$$2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) - \frac{1}{2} [P(\mu - 2\sigma \leq X \leq$$

$$\mu + 2\sigma) - P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)] =$$

$$\frac{1}{2} [P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) + P(\mu - \sigma \leq$$

$$X \leq \mu + \sigma)] \approx \frac{1}{2} \times (0.682\,7 + 0.954\,5) =$$

0.818 6. 故选 C.

4. **D** 【解析】当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 概率密

$$\text{度函数 } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ 在 } x = 0 \text{ 时取到}$$

$$\text{最大值 } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \text{ 故 } \sigma_2 = 1.$$

由正态曲线的性质知, 当 μ 一定时, σ 越小, 曲线越“瘦高”, 表示总体分布越集中;

σ 越大, 曲线越“矮胖”, 表示总体分布越分散.

于是有 $\sigma_3 > \sigma_2 = 1 > \sigma_1 > 0$.

5. **A** 【解析】由题意, 得 $D(X) = 4 \times \frac{1}{2} \times$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 = E(Y), \text{ 则 } \mu = 1.$$



又 $P(Y \leq a-1) + P(Y \leq 3-2a) = 1$, 则

$a-1+3-2a=2$, 解得 $a=0$. 故选 A.

6. D 【解析】 由 $X \sim N(10, \sigma^2)$ 及正态分布密度曲线的对称性可知, $P(X > 12) = P(X < 8) = m$, $\therefore P(X < 8) + P(8 \leq X \leq 10) = \frac{1}{2}$,

$\therefore m+n = \frac{1}{2} (m > 0, n > 0)$, $\therefore 2m+2n=1$, 则

$$\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n} \right) \cdot (2m+2n) = \frac{4m}{n} +$$

$$\frac{2n}{m} + 6 \geq 2\sqrt{\frac{4m}{n} \cdot \frac{2n}{m}} + 6 = 4\sqrt{2} + 6, \text{ 当且}$$

$$\text{仅当 } \frac{4m}{n} = \frac{2n}{m} (m > 0, n > 0), \text{ 即 } n = \sqrt{2}m$$

时, 等号成立.

因此 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 $6+4\sqrt{2}$, 故

选 D.

7. A 【解析】 因为蓝莓果重量 Z 服从正态分布 $N(15, 9)$, 其中 $\mu = 15, \sigma = 3$,

$$p = P(Z > 18) = P(Z > \mu + \sigma) =$$

$$\frac{1 - P(\mu - \sigma < Z \leq \mu + \sigma)}{2} =$$

$$\frac{1 - 0.6827}{2} \approx 0.2.$$

设第 k 次抽到优等果的概率 $P(X = k) = 0.8^{k-1} \cdot 0.2 (k = 1, 2, 3, \dots, n-1)$,

恰好抽取 n 次的概率 $P(X = n) =$

$$0.8^{n-1}, \text{ 所以 } E(X) = 0.2 \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot$$

$$0.8^{k-1} + n \cdot 0.8^{n-1}.$$

$$\text{设 } M = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot 0.8^{k-1}, \text{ 则 } 0.8M = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot$$

$$0.8^k,$$

$$\text{两式相减得 } 0.2M = \sum_{k=1}^{n-1} 0.8^{k-1} - (n-1) \cdot$$

$$0.8^{n-1} = \frac{1 - 0.8^{n-1}}{1 - 0.8} - (n-1) \cdot$$

$$0.8^{n-1} = 5(1 - 0.8^{n-1}) - (n-1) \cdot$$

$$0.8^{n-1},$$

$$\text{所以 } E(X) = 0.2M + n \cdot 0.8^{n-1} =$$



$$5(1 - 0.8^{n-1}) - (n - 1) \cdot 0.8^{n-1} + n \cdot$$

$$0.8^{n-1} = 5(1 - 0.8^n),$$

由 $5(1 - 0.8^n) \leq 3$, 得 $0.8^n \geq 0.4$,

$$\text{又 } 0.8^4 = 0.4096 > 0.4, 0.8^5 =$$

$$0.32768 < 0.4,$$

所以 n 的最大值为 4.

8. 【解】(1) 样本平均数 $\bar{x} = (5 \times 0.010 + 15 \times 0.020 + 25 \times 0.030 + 35 \times 0.025 + 45 \times 0.015) \times 10 = 26.5$.

(2) ① 由 (1) 可知 $\mu = \bar{x} = 26.5$, 从而 $Z \sim N(26.5, 10^2)$,

$$\therefore P(26.5 \leq Z \leq 46.5) = P(\mu \leq Z \leq \mu +$$

$$2\sigma) = \frac{1}{2}P(\mu - 2\sigma \leq Z \leq \mu + 2\sigma) \approx \frac{1}{2} \times$$

$$0.9545 = 0.47725,$$

$\therefore Z$ 落在 $[26.5, 46.5]$ 内的概率约为 0.47725.

② 设抽取的 10 件产品中, 产品质量指标值在 $(10, 50)$ 内的件数为 Y , 由题图可知, 任取一件产品质量指标值在 $(10, 50)$ 内的频率为 $(0.020 + 0.030 + 0.025 + 0.015) \times 10 = 0.9$,

$$\therefore Y \sim B(10, 0.9), E(Y) = 10 \times 0.9 = 9,$$

\therefore 产品质量指标值在 $(10, 50)$ 内的件数约为 9, 又 $X = 10Y - 50(10 - Y) = 60Y - 500$,

$$\therefore E(X) = 60E(Y) - 500 = 40.$$

9. AC 【解析】因为 $\xi \sim N(6, 4)$, 且

$$P(\xi \leq m+2) = P(\xi \geq 2m+1),$$

$$\text{所以 } \frac{m+2+2m+1}{2} = 6, \text{ 解得 } m = 3.$$

$$P(4 \leq \xi \leq 10) = P(6-2 \leq \xi \leq 6+2 \times 2) =$$

$$\frac{0.6827 + 0.9545}{2} = 0.8186. \text{ 故选 AC.}$$